

PRESENTATION DU PROJET DE THESE

Intitulé du projet de thèse : **Équations de Hamilton-Jacobi sur des graphes**

Acronyme du projet : HJ-graphes

Ecole doctorale : MIIS

Laboratoire d'accueil : LMI

Equipe de recherche : Modélisation, simulations numériques - imagerie et applications

Adresse : INSA Rouen Normandie

N° - Libellé de la voie : Avenue de l'Université

Code postal : |7|6|8|0|1| Commune : Saint Etienne du Rouvray

Nom du directeur de thèse : Nicolas Forcadel

Téléphone : |0|2|3|2|9|5|6|6|3|4| ;
Fixe

|0|6|1|3|8|4|0|4|0|5|
Mobile

Mél : nicolas.forcadel@insa-rouen.fr

Description du projet : Objectifs, contexte, bibliographie, perspectives

Contexte

Ces dernières années, les Equations aux Dérivées Partielles (EDP) non-linéaires sur des graphes ou des réseaux ont connu un intérêt croissant du fait qu'elles apparaissent naturellement dans beaucoup d'applications en mathématique, en physique, en biologie, en économie ou en science des données (par exemple les réseaux internet ou routier, les réseaux sociaux, la dynamique de population, le traitement d'image ou l'apprentissage automatique, voir [BK13, ELB08, GP06, PB04] et les références incluses). Parmi ces EDP, les équations d'Hamilton-Jacobi ont été particulièrement étudiées sur des réseaux (ou des structures stratifiées) dans [ACCT13, IMZ13, IM15, CFS11, CFS13] et dans [DE17, DEL13, TEL09, TEL11, TELM16] sur des graphes pondérés pour le traitement de données.

Ce sont ces derniers travaux qui ont motivé le contenu de ce sujet de thèse. En effet, dans un grand nombre de domaines scientifiques et pour des applications variées, des quantités massives de données sont générées chaque jour à partir d'une grande variété de sources incluant internet, des images, des nuages de points ou des maillages 3D, des réseaux biologiques, etc. Ces jeux de données, avec des structures complexes et irrégulières sont directement générés ou peuvent être modélisés comme des graphes ou comme des fonctions définies sur des graphes. En conséquence, il y a une énorme demande et un intérêt croissant pour l'analyse, le traitement et le stockage de ces données. Ceci a encouragé une activité de recherche intensive pour développer de nouvelles méthodes pour traiter et analyser les données définies sur des graphes et pour étendre aux graphes les méthodes classiques et les concepts utilisés en traitement du signal et des images. En particulier, il y a des travaux récents dont le but est de transposer des EDPs sur des graphes (voir par exemple [H03, ELB08, MOS15]) de telle façon que la solution se comporte de manière analogue à la formulation continue (voir [GP99] et les références contenues pour une vision complète de ce sujet et des applications en traitement d'images et en machine learning). L'inconvénient de ces méthodes est que cela permet une adaptation sur les graphes qui n'est pas nécessairement consistante avec la formulation continue (voir [GP99]) et très peu d'études ont été faites concernant la limite continue de ces équations discrètes sur les graphes (on renvoie par exemple à [HFE18] pour la limite continue du p-Laplacien). Le but de ce projet sera l'étude de ces limites continues pour les équations de Hamilton-Jacobi.

Objectifs

Actuellement, pour l'analyse de données sur des graphes, les modèles discrets non-locaux se sont montrés extrêmement performants. On peut citer par exemple les équations du type p-Laplacien ou laplacien infini sur graphe, l'équation eikonale, le mouvement par courbure moyenne ou encore des modèles variationnels utilisant le concept du périmètre sur graphe comme la régularisation non-locale par la variation totale ou le modèle de Mumford-Shah. Ces modèles ont été utilisés avec succès pour résoudre de manière unifiée des problèmes de traitement d'image locaux et non-locaux, de traitement d'image sur des nuages de points ou encore pour l'analyse de grande masse de données sur des graphes. Un des buts de ce projet sera l'étude des équations de Hamilton-Jacobi (non-locales) sur des graphes. Plus précisément, le but sera d'étudier la consistance de ces modèles sur graphes quand le nombre de sommets augmente. Pour cela, il s'agira d'étudier la limite continue de ces équations discrètes sur les graphes quand le nombre de sommets tend vers l'infini et d'établir des taux de convergence via des estimations d'erreur entre la solution du problème discret et leur contrepartie continue. Ce travail a commencé dans le cadre du projet régional Monomad dans lequel nous avons étudié la limite continue de l'équation eikonale. En utilisant les techniques non-locales que j'ai développées dans [F08], nous avons été capables avec J. Fadili et T. Nguyen [FFN20] de caractériser la limite continue, dans le cas d'un noyau borné et pour un gradient non-local relativement simple. Dans le cadre de ce projet, le but est de développer de nouvelles techniques afin d'être capable de traiter des équations de Hamilton-Jacobi plus générale et en particulier le mouvement par courbure moyenne.

Le projet sera découpé suivant les tâches suivantes :

- Tâche 1 : Cas de l'équation Eikonale avec un noyau non borné et uniquement L_p intégrable.
 Tâche 2 : Cas de l'équation Eikonale avec des gradients non-locaux généraux.
 Tâche 3 : Cas des équations géométriques correspondants aux mouvements d'interfaces, en particulier pour le mouvement par courbure moyenne.
 Tâche 4 : Cas des équations de Hamilton-Jacobi plus générales

Encadrement de la thèse

La thèse se déroulera en co-tutelle entre l'INSA Rouen Normandie et l'Université Libanaise. Elle sera co-dirigée par Hassan Ibrahim (Université Libanaise) et Nicolas Forcadel (INSA Rouen) qui ont déjà collaborer dans l'encadrement de la thèse de Rim Fayad. Dans le LMI, le candidat intégrera l'équipe *Modélisation, simulations numériques - imagerie et applications* qui a développé une très bonne expertise dans le domaine des EDP sur des réseaux et des graphes. La thèse sera faite également en forte collaboration avec Jalal Fadili (Greyc, EnsiCaen) avec qui Nicolas Forcadel a collaboré sur cette thématique dans le cadre du projet RIN Monomad.

Références:

- [ACCT13] Y. Achdou, F. Camilli, A. Cutri, and N. Tchou. Hamilton–Jacobi equations constrained on networks. *Nonlinear Differential Equations Appl.*, 20:413–445., 2013.
- [BK13] G. Berkolaiko and P. Kuchment. *Introduction to Quantum Graphs*, volume 186 of *Mathematical Surveys and Monographs*. AMS, 2013.
- [CFS11] F. Camilli, A. Festa, and D. Schieborn. Shortest paths and eikonal equations on a graph. arXiv:1105.5725, 2011.
- [CFS13] F. Camilli, a. Festa, and d. Schieborn. An approximation scheme for a Hamilton-Jacobi equation defined on a network. *Applied Numerical Mathematics*, 73:33 – 47, 2013.
- [DE17] X. Desquesnes and A. Elmoataz. Non-monotonic front propagation on weighted graphs with applications in image processing and high-dimensional data classification. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 11(6):897–907, 2017.
- [DEL17] X. Desquesnes, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Eikonal equation adaptation on weighted graphs: fast geometric diffusion process for local and non-local image and data processing. *J. Math. Imaging Vision*, 46(2):238–257, 2013.
- [ELB08] A. Elmoataz, O. Lezoray, and S. Bougleux. Nonlocal discrete regularization on weighted graphs: a framework for image and manifold processing. *IEEE Trans. Image Process.*, 17(7):1047–1060, 2008.
- [FFN20] J. Fadili, N. Forcadel et T. Nguyen, Limits and consistency of non-local approximations to the Eikonal equation. Work in preparation.
- [F08] N. Forcadel, *An error estimate for a new scheme for mean curvature motion*, *SIAM J. Numer. Anal.*, 46 (2008), pp. 2715–2741.
- [GP06] M. Garavello and B. Piccoli. *Traffic flow on networks*. AIMS Series on Applied Mathematics. Springfield, 2006.
- [GP99] L.J. Grady et J. R. Polimeni, *Discrete Calculus*, *Applied Anal. Graphs Comput. Sc* (1999)
- [HFE18] Y. Hafiene, J. Fadili, et A. Elmoataz, Nonlocal p -Laplacian evolution problems on graphs. *SIAM J. Numer. Anal.* 56 (2018), no. 2, 1064–1090.
- [H03] Hirani, A. N.: *Discrete exterior calculus*. Ph.D. thesis California Ins. Tech. (2003)
- [IMZ13] C. Imbert, R. Monneau, et H. Zidani, *A Hamilton-Jacobi approach to junction problems and application to traffic flows*, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 19 (2013), pp. 129–166.
- [IM15] C. Imbert et R. Monneau, *Level-set convex Hamilton-Jacobi equations on networks*.
- [MOS15] J. Manfredi, A. Oberman et A. Sviridov, Nonlinear elliptic partial differential equations and p -harmonic functions on graphs. *Differential Integral Equations* 28 (2015), no. 1-2, 79–102.
- [PB04] Y. V. Pokornyi and A. V. Borovskikh. Differential equations on networks (geometric graphs). *J. Math. Sci.*, 119:691–718, 2004.
- [TEL09] V.-T. Ta, A. Elmoataz, and O. Lézoray. Adaptation of eikonal equation over weighted graphs. In *International Conference on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, volume 5567 of *LNCS*, pages 187–199. Springer, 2009.
- [TEL11] V.T. Ta, A. Elmoataz, and O Lézoray. Nonlocal pdes-based morphology on weighted graphs for image and data processing. *IEEE Trans. Image Process.*, 20(6):1504–1516, 2011.
- [TELM16] M. Toutain, A. Elmoataz, F. Lozes, and A. Mansouri. Non-local discrete 1-poisson and

hamilton jacobi equations: From stochastic game to generalized distances on images, meshes, and point clouds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 55(2):229–241, 2016.

Mots-clés : EDP sur graphe, modélisation mathématique et simulations numériques, équations de Hamilton-Jacobi, traitement de données.